令和５年　大学入試共通テスト（数学Ｉ・数学 A）の略解と解説

一昨日　冗　著

注意：　答えは，赤文字 or 赤数字などで示す。

第１問.　［１］不等式や式の計算についての問題。

解答）実数 x についての不等式　$|x+6| \leqq 2$　の解は
$x \leqq -6$　のとき $x \geqq -8$，$x \geqq -6$　のとき $x \leqq -4$　だから　$-8 \leqq x \leqq -4$　である。

よって，実数 a, b, c, d が　$|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6| \leqq 2$　を満たしているとき，$1-\sqrt{3}$ は負であることに注意すると，$(a-b)(c-d)$　のとり得る値の範囲は，

$$-8 \leqq (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d) \leqq -4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{\sqrt{3}-1} \geqq (a-b)(c-d) \geqq \frac{4}{\sqrt{3}-1} \quad \text{より}$$

$$2+2\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq 4+4\sqrt{3}$$

であることがわかる。特に

$$(a-b)(c-d) = 4+4\sqrt{3} \quad \cdots \quad ①$$

であるとき，さらに

$$(a-c)(b-d) = -3+\sqrt{3} \quad \cdots \quad ②$$

が成り立つならば，

①より　$ac-ad-bc+bd = 4+4\sqrt{4},$　$\cdots$　④

②より　$ab-ad-bc+cd = -3+\sqrt{3}$　$\cdots$　⑤

だから，④-⑤を計算すると　$ac-ab+bd-cd = 7+3\sqrt{3}.$　したがって

$$(a-d)(c-b) = 7+3\sqrt{3} \quad \cdots \quad ③$$

であることがわかる。

第１問.　［２］(1) 点 O を中心とし，半径が 5 である円 O がある。この円周上に 2 点 A, B を AB= 6 となるようにとる。また，円 O の円周上に，2 点 A, B とは異なる点 C をとる (下図，左参照)。

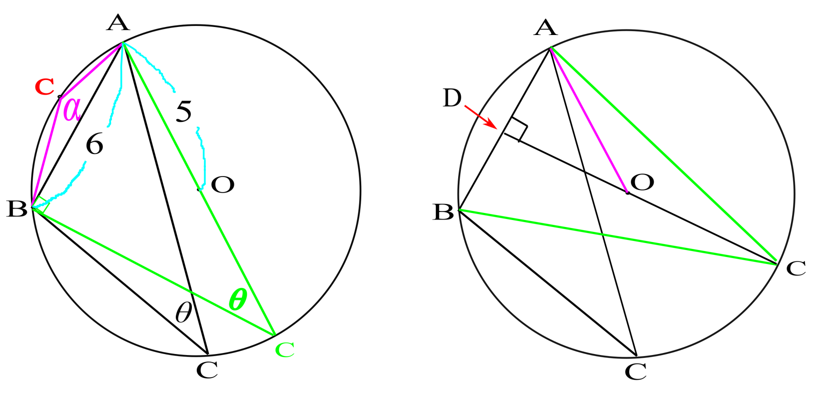


図1-1

解答）(i) 図のように点 C は円周上のどこにあっても，△ABC は円 O に内接する三角形なので

正弦定理より，$\dfrac{\text{AB}}{\sin\angle\text{ACB}} = 10$　だから，$\sin\angle\text{ACB} = \dfrac{3}{5}$　である。

また，点 C を　$\angle$ACB　が鈍角となるようにとるとき（上図，赤の C で $\angle\text{ACB} = \alpha$），

$$\cos\angle\text{ACB} = \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = -\frac{4}{5} \quad \text{である。}$$

(ii) 点 C を △ABC の面積が最大となるようにとる。点 C から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を D とするとき,（図 1-1. 右図より，題意を満たす点 C は，線分 DC が円の中心 O を通ときである。点 D は線分 AB の中点である。） $\tan\angle\mathrm{OAD} = \dfrac{4}{3}$ である。

（注意：△OAD は三辺が $3, 4, 5$ の直角三角形。）

また，△ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\times 6\times 9 = 27$ である。

(2) 半径が 5 である球 S がある。この球面上に 3 点 P, Q, R をとったとき，これらの 3 点を通る平面 α 上で PQ=8, QR=5, RP=9 であったとする。球 S の球面上に点 T を三角錐 TPQR の体積が最大になるようにとるとき，その体積を求めよう。

解答） $\angle\mathrm{QPR}=\theta$ とおく。（以下，図 1-2. 左図を参照のこと）三角関数の余弦定理より，

$25 = 64 + 81 - 2\cdot 8\cdot 9\cos\theta$ より $6\cos\theta = 5$ を得るので，$\cos\angle\mathrm{QPR}= \dfrac{5}{6}$ である。

このとき，$\sin\theta = \sqrt{1-\dfrac{25}{36}} = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$ だから，△PQR の面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 9\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6} = 6\sqrt{11}$ である。

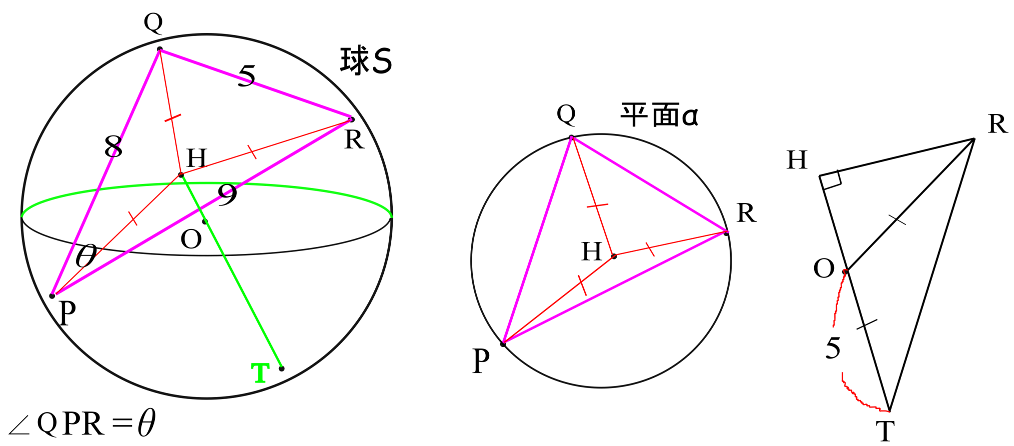


図1-2 半径5の球

次に，点 T から平面 α に垂直な直線を引き，平面 α との交点を H とする。このとき，PH, QH, RH の長さについて,「平面 α によって切り取られる球の切り口は円 H（上図，真ん中のもの）であり，線分 HT 上に球 S の中心 O がある」 などを考慮して（空間内のこれらの点の位置関係を正確にとらえるのは大変難しい）考えると PH=QH=RH が成り立つ。

三角錐 TPQR の体積を求めよう。まず，円 H の半径 r は $\dfrac{5}{\sin\theta} = 2r$ より

$\dfrac{30}{\sqrt{11}} = 2r \quad \therefore\ r = \dfrac{15\sqrt{11}}{11}$ となる。x =HO とおくと（上図右，△HOR 参照）

$$x^2 + \left(\frac{15\sqrt{11}}{11}\right)^2 = 25 \quad \text{より} \quad x^2 = 5^2\cdot\frac{2}{11} \qquad \therefore x = \frac{5}{11}\sqrt{22}.$$

HT$= 5 + \dfrac{5}{11}\sqrt{22}$ だから，三角錐 TPQR の体積 V は，

$$V = \frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{11}\left(5+\frac{5}{11}\sqrt{22}\right) = \ \cdots\ = 10(\sqrt{11}+\sqrt{2})$$

である。

解説）［１］は計算だけなのだが，ケアレスミスが出やすいね。$\boxed{\text{アイ}}$, $\boxed{\text{ウエ}}$ はレベル４，$\boxed{\text{オ}}$ から $\boxed{\text{ク}}$ はレベル 2.5，$\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ はレベル３ですね。

［２］の (1) は，円に内接する図形の問題なので，見慣れていた問題だったと思います。レベル３ですね。［２］の (2) は，空間図形になったので正確な想像力がカギになるね，けっこう難しいよね。しかし，余弦定理と正弦定理は必須ですね。最後の，三角錐の体積計算は難しかったね。$\boxed{\text{タ}}$ から $\boxed{\text{テト}}$ はレベル 2.5，$\boxed{\text{ナ}}$ はレベル 1.5，最後の体積計算はレベル１かな。

第２問．［１］ 太郎さんは，次のような 2020 年の家計調査のデータを扱っている。
・地域による食文化の違いを考察するために，調理食品の１所帯当たり年間支出金額を分析。
・調査地点は，都道府県庁所在市および政令指定都市（都道府県庁所在市を除く）の 52 市。
・調査所帯は二人以上の所帯で，支出金額の単位は円である。

最初に，うなぎのかば焼きに着目し，下図, 図１のように 52 市におけるかば焼きの支出金額のヒストグラムを作成した。ただし，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

解答）(1) 図１から次のことが読み取れる。
・第１四分位数が含まれる階級は，1800 以上 2200 未満である。
なぜならば，第１四分位数は，小さい方から 13 番目のデータと 14 番目のデータの平均だからである。図に緑の矢印で場所を示した。ヒストグラムの上の数字は，累積された度数である。参考のために，中央値は 26 番目と 27 番目のデータの平均である。この位置は赤の矢印で示した。

・第３四分位数が含まれる階級は，3000 以上 3400 未満である。
なぜならば，第３四分位数は，小さい方から 39 番目のデータと 40 番目のデータの平均だからである。図に緑の矢印で場所を示した。

・四分位範囲は，800 より大きく 1600 より小さい。
なぜならば，２つの緑の矢印の距離は，$3000-2200$ 以上で $3400-1800$ 以下だからである。

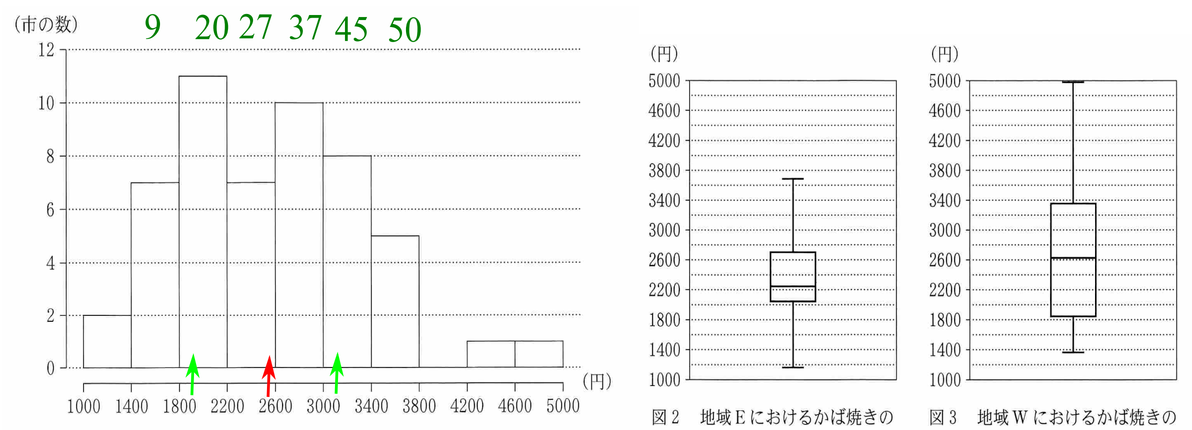


図１　かば焼きの支出金額のヒストグラム

図２　地域Ｅにおけるかば焼きの支出金額の箱ひげ図

図３　地域Ｗにおけるかば焼きの支出金額の箱ひげ図

図2-1

(2) 太郎さんは，東西での地域による食文化の違いを調べるために，52 市を東側の地域Ｅ（19 市）と西側の地域Ｗ（33 市）の二つに分けて考えることにした。
(i) 地域Ｅと地域Ｗについて，かば焼きの支出金額の箱ひげ図を，図 2, 図 3 のようにそれぞれ作成した。
解答）かば焼きの支出金額について，図２と図３から読み取れることとして，下の解答群のうち，

正しいものは,「中央値は，地域 E より地域 W の方が大きい。」 である。
この答えは，箱ひげ図から明らかだよね。箱の中の横線の位置の値が中央値だからね。

(ii) 太郎さんは，地域 E と地域 W のデータの散らばりの度合いを数値でとらえようと思い，それぞれの分散を考えることにした。地域 E におけるかば焼きの支出金額の分散は，地域 E のそれぞれの市におけるかば焼きの支出金額の偏差の 2 乗を合計して地域 E の市の数で割った値である。

参考：19 都市のデータ $x_1, x_2, \cdots, x_{19}$ に対して平均は $\bar{x} = \dfrac{1}{19}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{19})$,

分散は $S^2 = \dfrac{1}{19}\{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_{19} - \bar{x})^2 \}$ である。

(3) 太郎さんは，(2) で考えた地域 E における，やきとりの支出金額についても調べることにした。ここでは地域 E において，やきとりの支出金額が増加すれば，かば焼きの支出金額も増加する傾向があるのではないかと考え，まず図 4 のように，地域 E における，やきとりとかば焼きの支出金額の散布図を作成した。そして，相関係数を計算するために，表 1 のように平均値，分散，標準偏差および共分散を算出した。ただし，共分散は地域 E のそれぞれの市における，やきとりの支出金額の偏差とかば焼きの支出金額の偏差との積の平均値である。

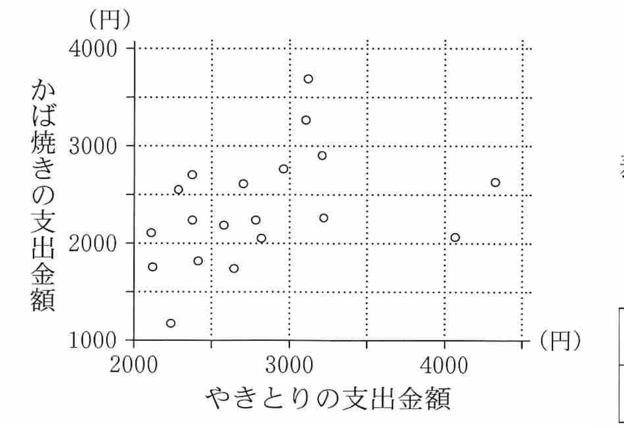


図4　地域Eにおける，やきとりとかば焼きの支出金額の散布図

相関係数 $r = \dfrac{k}{s_x s_y}$

表 1　地域 E における，やきとりとかば焼きの支出金額の平均値，分散，標準偏差および共分散

	平均値	分　散	標準偏差	共分散
やきとりの支出金額	2810	348100	590	124000
かば焼きの支出金額	2350	324900	570	

s_x　s_y　k

図2-2　やきとりとかば焼き

解答） 表 1 を用いると，地域 E における，やきとりの支出金額とかば焼きの支出金額の相関係数 r は，

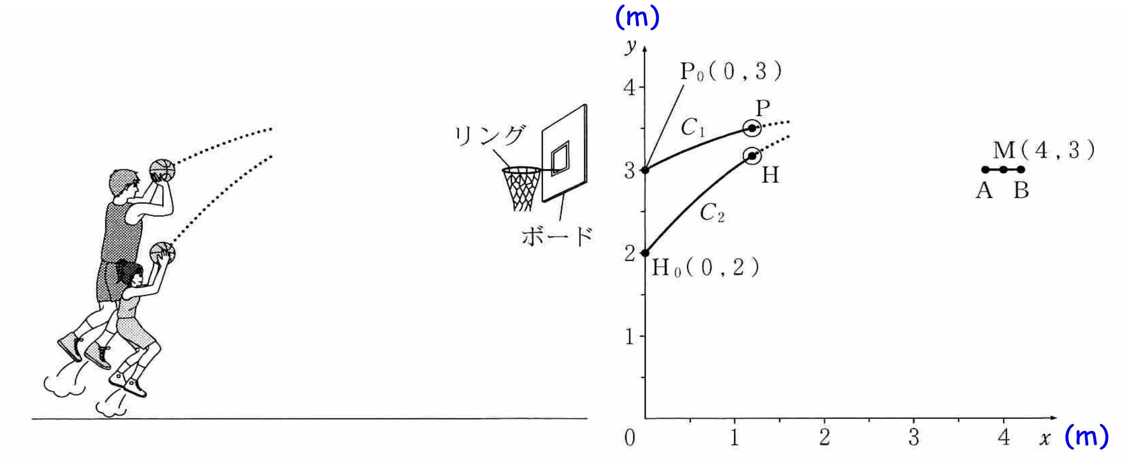
$$r = \frac{k}{s_x s_y} = \frac{124000}{590 \cdot 570} = \frac{1240}{3363} = 0.3687\cdots = 0.37$$ （表 1 の上の式参照せよ）

である。

解説）この問題は，説明の文章がやたら長いね。その割には問の中身が小さくて面白くないね。問はごくごく普通の基本的な問題だね。皆（みんな）できなくちゃダメだよ。(1) はレベル３，(2) の (i),(ii) もレベル３，(3) は計算が少しあるのでレベル 2.5 だね。

第２問． ［２］ 太郎さんと花子さんは，バスケットボールのプロ選手の中には，リングと同じ高さでシュートを打てる人がいることを知り，シュートを打つ高さによってボールの軌道がどう変わるかについて考えている。

　二人は，図 1 のように座標軸が定められた平面上に，プロ選手と花子さんがシュートを打つ様子を真横から見た図をかき，ボールがリングに入った場合について，後の仮定を設定して考えることにした。長さの単位はメートルであるが，以下では省略する。



参考図　　　　図 1

図2-3　バスケットボール　　ボールは直径0.2mの円

−−−−−−＜仮定＞−−

- 平面上では，ボールを直径 0.2 の円とする。
- リングを真横から見たときの左端を点 A(3.8, 3), 右端を点 B(4.2, 3) とし，リングの太さは無視する。
- ボールがリングや他のものに当たらずに上からリングを通り，かつ，ボールの中心が AB の中点 M(4, 3) を通る場合を考える。ただし，ボールがリングに当たるとは，ボールの中心と A または B との距離が 0.1 以下になることとする。
- プロ選手がシュートを打つ場合のボールの中心を点 P とし，P は，はじめに点 $P_0(0, 3)$ にあるものとする。また，P_0, M を通る，上に凸の放物線を C_1 とし，P は C_1 上を動くものとする。
- 花子さんがシュートを打つ場合のボールの中心を点 H とし，H は，はじめに点 $H_0(0, 2)$ にあるものとする。また，H_0, M を通る，上に凸の放物線を C_2 とし，H は C_2 上を動くものとする。
- 放物線 C_1 や C_2 に対して，頂点の y 座標を「**シュートの高さ**」とし，頂点の x 座標を「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」とする。

−−

解答）(1) 放物線 C_1 の方程式における x^2 の係数を a とする。この放物線の y 切片は 3 なので，方程式を　$y = ax^2 - kax + 3$　とおく。$x = 4$ のとき $y = 3$ なので

$$3 = 16a - 4kax + 3, \quad \to \quad 4a(4 - k) = 0 \quad \therefore \quad k = 4.$$

よって，C_1 の方程式は　$y = ax^2 - 4\,ax + 3 = a(x-2)^2 - 4a + 3$　と表すことができる。
また，プロ選手の「**シュートの高さ**」は，$-4\,a + 3$ （C_1 の頂点の y 座標の値）である。

放物線 C_2 の方程式における x^2 の係数を p とする。放物線 C_2 の方程式は

$$y = p\left\{x - \left(2 - \frac{1}{8p}\right)\right\}^2 - \frac{(16p-1)^2}{64p} + 2$$

と表すことができる。プロ選手と花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の比較の記述として，次の解答群のうち，正しいものは，花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が，つねに M の x 座標に近い。である。どうしてかというと，C_1 と C_2 の頂点の x 座標は，それぞれ　2 と $2 - \dfrac{1}{8p}$　で，　$2 < 2 - \dfrac{1}{8p}$　がつねに成り立つからである（$p < 0$ に注意）。

(2) 二人は，ボールがリングすれすれを通る場合のプロ選手と花子さんの「**シュートの高さ**」について次のように話している。

−−−

太郎：例えば，プロの選手のボールがリングに当たらないようにするには，P がリングの左端 A のどのくらい上を通れば良いのかな。

花子：A の真上の点で P が通る点 D を，線分 DM が A を中心とする半径 0.1 の円と接するようにとって考えてみたらどうかな。

太郎：なるほど，P の軌道は上に凸の放物線で山なりだから，その場合，図 2 のように，P は D を通った後で線分 DM より上側を通るのでボールはリングに当たらないね。花子さんの場合も，H がこの D を通れば，ボールはリングに当たらないね。

花子：放物線 C_1 と C_2 が D を通る場合でプロ選手と私の「**シュートの高さ**」を比べてみようよ。

−−−

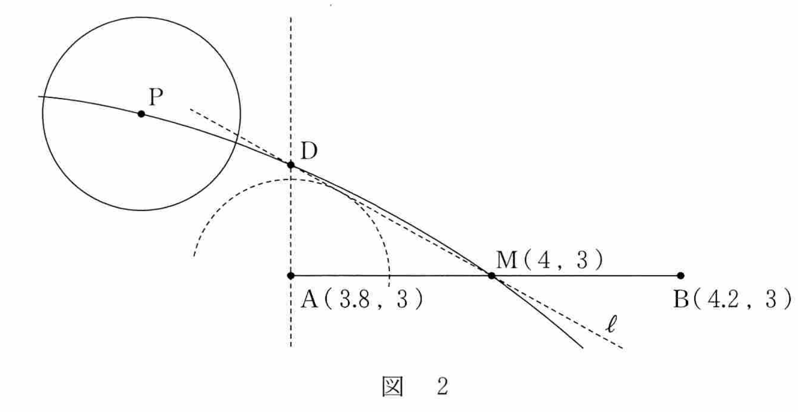


図2−4　シュートの高さ

図 2 のように，M を通る直線 ℓ が，A を中心とする半径 0.1 の円に直線 AB の上側でせっしているとする。また，　A を通り直線 AB に垂直な直線を引き，ℓ との交点を D とする。このとき，

AD$=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$　である。（この数値は求めさせた方がよかったね）

解答）よって，放物線 C_1 が D を通るとき，C_1 の方程式は

$$3+\frac{\sqrt{3}}{15}=a(3.8-2)^2+3-4a \quad \to \quad -0.76a=\frac{\sqrt{3}}{15} \quad \therefore \quad a=-\frac{5\sqrt{3}}{57}$$

より

$$y=-\frac{5\sqrt{3}}{57}(\ x^2-4x\ )+3 \quad \cdots \quad ①$$

となる。

また，放物線 C_2 が D を通るとき，(1) で与えられた C_2 の方程式を用いると，花子さんの「**シュートの高さ**」は約 3.4 と求められる。（この数値を与えたのはいいのか悪いのかよくわかんないね）

以上のことから，放物線 C_1 と C_2 が D を通るとき，プロ選手と花子さんの「**シュートの高さ**」を比べると，プロ選手の「**シュートの高さ**」の方が大きく，その差はボール約 1 個分である。なお，$\sqrt{3}=1.7320508\cdots$　である。なぜならば，方程式①は，

$$y=-\frac{5\sqrt{3}}{57}(\ x-2\ )^2+3+\frac{20\sqrt{3}}{57}$$

となるので，「**シュートの高さ**」は最後の定数項なので，これを計算すると　$3.6077\cdots$　である。（こんな計算させない方がいいよね！）

解説）［２］問題の題材・内容などけっこう面白くていい問題でしたね。しかし，説明文が長いので，国語力と忍耐が必要だね。(1) の $\boxed{\text{キ}}$ から $\boxed{\text{コ}}$ はレベル３，$\boxed{\text{サ}}$ はレベル 2.5 です。(2) の $\boxed{\text{シ}}$ から $\boxed{\text{セソ}}$ はレベル 1.5，$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$ はレベル１です。最後の２つは，計算が大変なので受験者にとってはいやな問題ですね。

第３問．番号によって区別された複数の球が，何本かのひもでつながれている。ただし，各ひもはその両端で二つの球をつなぐものとする。次の条件を満たす球の塗り分け方（以下，球の塗り方）を考える。

－－－－<条件>－－

・ それぞれの球を，用意した５色（赤，青，黄，緑，紫）のうちのいずれか１色で塗る。
・ １本のひもでつながれた二つの球は異なる色になるようにする。
・ 同じ色を何回使ってもよく，また使わない色があってもよい。

－－

例えば図 A では，三つの球が２本のひもでつながれている。この三つの球を塗るとき，球１の塗り方が５通りあり，球１を塗った後，球２の塗り方は４通りあり，さらに球３の塗り方は４通りある。したがって，球の塗り方の総数は 80 である。

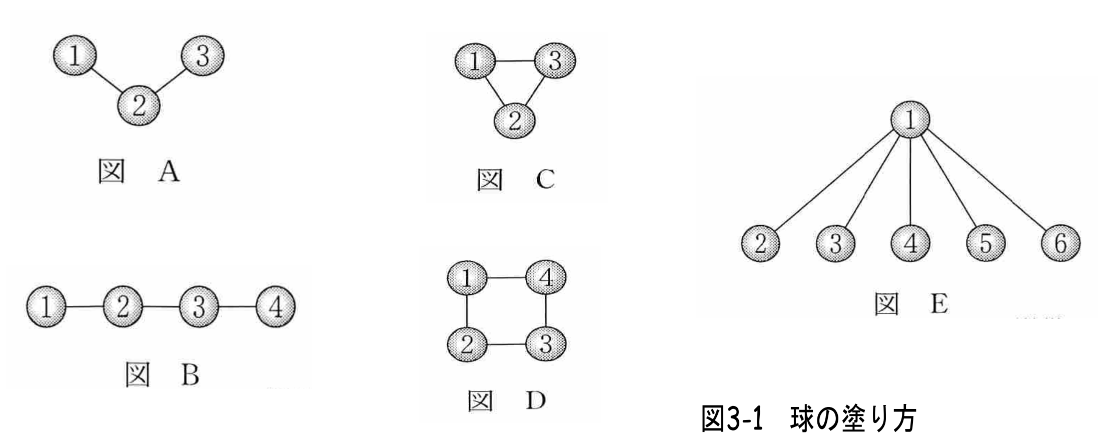


図3-1　球の塗り方

解答）(1) 図 B において，球の塗り方は 320 通りある。なぜならば，球１の塗り方は５通りあり，球 2,3,4 の塗り方はそれぞれ４通りだから　$5 \times 4 \times 4 \times 4 = 320$.

(2) 図 C において，球の塗り方は 60 通りある。なぜならば，球１の塗り方は５通りあり，球２の塗り方は４通り，球３の塗り方は３通りだからである。

(3) 図 D における球の塗り方のうち，赤をちょうど２回使う塗り方は 32 通りある。なぜならば，①と③が赤のときの塗り方は１６通りある。②と④が赤のときも同様だからである。

(4) 図 E における球の塗り方のうち，赤をちょうど３回使い，かつ青をちょうど２回使う塗り方は 30 通りある。なぜならば，①は赤, 青以外の３通りの塗り方があり，②から⑥には，赤が３つかつ青が２つでなければならない（この並べ方は ${}_5C_2 = 10$ 通りある）ので，答えは 3×10.

(5) 図 D において，球の塗り方の総数を求める。そのために，次の構想を立てる。

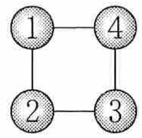


図　D(再掲)

図3-2

構想

図Dと図Fを比較する。

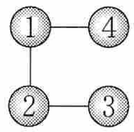
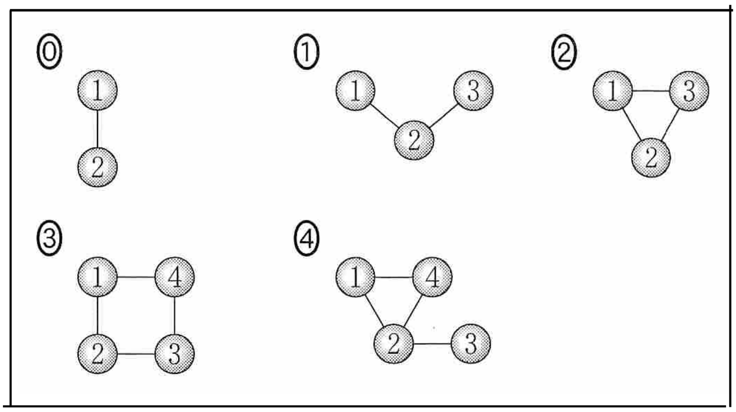


図　F

図 F では球 3 と球 4 が同色になる球の塗り方が可能であるため，図 D よりも図 F の球の塗り方の総数の方が大きい。

図 F における球の塗り方は，図 B における球の塗り方と同じであるため，全部で 320 通りある。
解答）そのうち球 3 と球 4 が同色になる球の塗り方の総数と一致する図として，下の解答群のうち，正しいものは②である。したがって，図 D における球の塗り方は 260 通りある。

コ の解答群



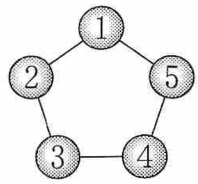


図　G

図3-3

上の答えは，問題文がほぼ解答の道筋を示しているが，次のように考えればよい：
・図 D では，球 3 と球 4 は異なる色でなければならない。
・球 3 と球 4 の色が一致するときの場合の数が分れば，これを図 F の答えから引けばよい。
これは，球 3 と球 4 は 1 つのものと考えること（すなわち，解答群の②）で，場合の数が計算できる。
・図②の塗り方は 60 通りなので，$320 - 60 = 260$ が答え。

(6) 図 G（図 3-3. の右のもの）において，球の塗り方は 1020 通りある。この答えを導くため，(5) の構想の図を参考にする。図 G の②, ①, ⑤, ④ の関係図において，

(i) ②と④が同じ色になるのは 60 通り（前の問 (5) よりわかる），このとき③の塗り方は 4 通り。したがって，この場合の総数は $60 \times 4 = 240.$

(ii) ②と④が同じ色にならないのは 260 通り，このとき③の塗り方は 3 通り。したがって，この場合の総数は $260 \times 3 = 780.$

二つの場合を合計して $240 + 780 = 1020$ を得る。

解説）場合の数を求める問題だが，ひも付きの球にカラーが絡んでくるので，教科書ではほとん

ど見られない問題で，けっこう面白かったね。(1) はレベル 3.5，(2),(3) はレベル３，(4) はレベル 2.5，(5) はレベル 1.5，(6) はレベル１ですね。(5) の構想のところがすんなり分れば，(6) も難しくはないですね。難易度も，易しいものから難しいものまであって，いい問題でした。

第４問. 色のついた長方形を並べて正方形や長方形を作ることを考える。色のついた長方形は，向きを変えずにすき間なく並べることとし，色のついた長方形は十分あるものとする。

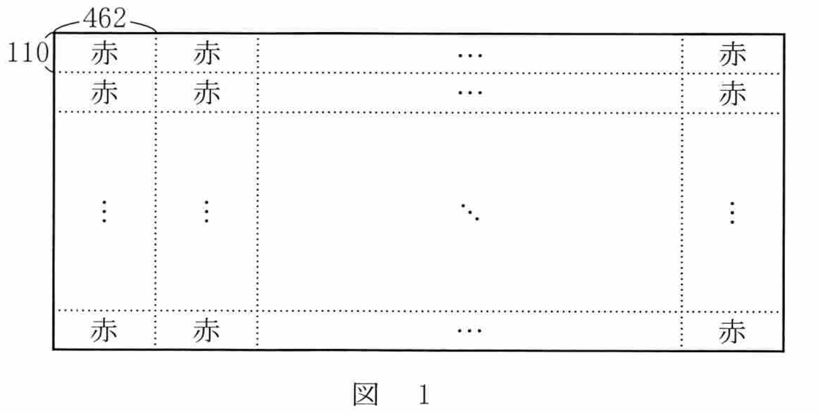


図4-1

(1) 横の長さが 462 で縦の長さが 110 である赤い長方形を，図１のように並べて正方形や長方形を作ることを考える。

解答）462 と 110 の両方を割り切る素数のうち最大のものは，

$$462 = 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11, \qquad 110 = 2\cdot 5\cdot 11$$

より，11 である。

赤い長方形を並べて作ることができる正方形のうち，辺の長さが最小であるものは，一辺の長さが 2310 のものである（これは，二数の最小公倍数）。

また，赤い長方形を並べて正方形ではない長方形を作るとき，横の長さと縦の長さの差の絶対値が最小になるのは，462 の約数と 110 の約数を考えると，差の絶対値が 22 になるときであることがわかる。なぜならば，

m, n を自然数とし，横の長さを $462m$，縦の長さを $110n$ とおくと（下図，左参照），$462m - 110n = 2\cdot 11(21m - 5n)$ より，$21m - 5n = \pm 1 \quad \cdots (\dagger)$ のとき，この差の絶対値は最小になることがわかる。例えば，$m = 1, n = 4$ のとき。($\dagger$) の解はこれ以外にもあるよ。

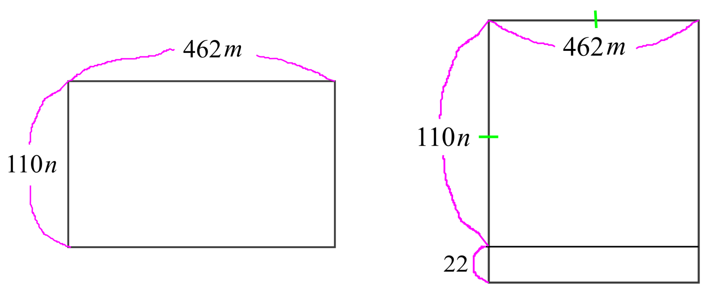


図4-2　長方形の敷き詰め

縦の長さが横の長さより 22 長い長方形のうち，横の長さが最小であるものは，横の長さが 1848 のものである。なぜならば，

$462m + 22 = 110n$ より，$22(21m + 1) = 22\cdot 5n$ となるので，$21m + 1$ が５の倍数となるような最小の m を見つければよい。$m = 4$ がわかるので，横の長さは $462 \times 4 = 1848$ である。

(2) 花子さんと太郎さんは，(1) で用いた赤い長方形を 1 枚以上並べて長方形を作り，その右側に横の長さが363 で縦の長さが154 である青い長方形を 1 枚以上並べて，図 2 の様な正方形や長方形を作ることを考えている。

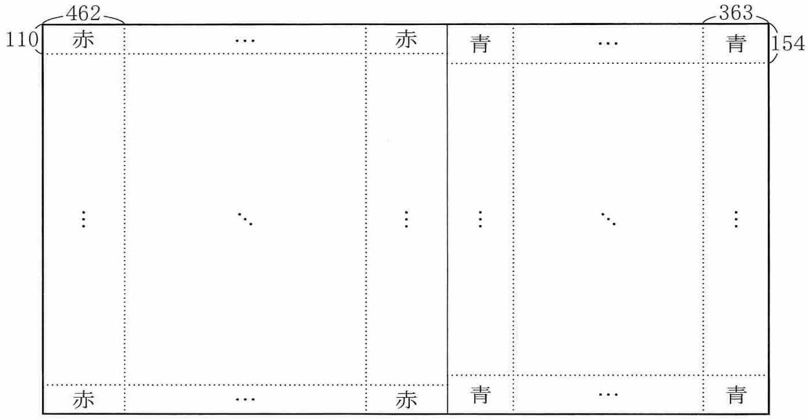


図　2

図4-3

解答）このとき，赤い長方形を並べてできる長方形の縦の長さと，青い長方形を並べてできる長方形の縦の長さは等しい。よって，図 2 のような長方形は縦の長さが 770 のものであり（$110 = 2\cdot5\cdot11$，　$154 = 2\cdot7\cdot11$　より，二数の最小公倍数は 770 だから），図 2 のような長方形は縦の長さが 770 の倍数である。

二人は，次のように話している。

－－

花子：赤い長方形と青い長方形を図 2 のように並べて正方形を作ってみようよ。

太郎：赤い長方形の横の長さが 462 で青い長方形の横の長さが 363 だから，図 2 のような正方形の横の長さは 462 と 363 を組み合わせて作ることができる長さでないといけないね。

花子：正方形だから，横の長さは 770 の倍数でもないといけないね。

－－

解答）462 と 363 の最大公約数は 33 であり，33 の倍数のうちで 770 の倍数でもある最小の正の整数は 2310 である。この答えは，次のように導くことができる。

k, l を自然数として。$770k = 33l$ を満たす最小の k は，$11(70k-3l) = 0$ から $k = 3$ $(l = 70)$ であることがわかる。

これらのことと，使う長方形の枚数が赤い長方形も青い長方形も 1 枚以上であることから，図 2 のような正方形のうち，辺の長さが最小であるものは，一辺の長さが 6930 のものであることがわかる。どうしてかというと，

正方形の一辺の長さは，l, m, n を自然数として，$2310l = 462m + 363n$　を満たさなければならない。これは $70l = 14m + 11n$　と同値である。$l = 1, 2$ に対しては解がないことがわかるので（この証明は難しいよ，書くのは止めておきます），$l = 3$ のときの　$14m + 11n = 210$　の解を求めよう。これは不定方程式

$$14(m-11) + 11(n-5) = 1 \quad \cdots \quad ①$$

の一般解を求めることでわかる。$x = m - 11,\ y = n - 5$　とおいたとき，①の 1 つの解は $x = 4,\ y = -5$ だから

$$14\cdot4 - 11\cdot5 = 1. \quad \cdots \quad ②$$

①-②から方程式　$14(m-15) + 11n = 0$　が得られる。これの一般解は

$$m-15=11k, \quad n=-14k \quad (k \text{ は 0 でない整数})$$

となるので，解は $k=-1$ のときで，$m=4,\ n=14$ である（これ以外に解はないことに注意せよ）。以上より，正方形の一辺の長さで最小のものは $2310\times 3=6930$ である。（こんな解法難しすぎるよね。もっとやさしい解法があるかも知れませんが，私にはわかりません。ごめんなさいね !!）

解説）去年と同様に，次の 2 つの結果を使えるようにしておくことが大切ですね。

［定理 A］ 2 つの整数 a, b が互いに素であるとき，$ax+by=1$ を満たす整数 x, y が存在する。

［定理 B］ 2 つの整数 a, b が互いに素であるとき，方程式 $ax+by=0$ の全ての整数解は

$$x=bk, \quad y=-ak \quad (k \text{ は整数})$$

と表される。

これらの結果は，数学 A にあり，不定方程式 $ax+by=1$ の解法も扱っているので，範囲外の問題ではない。(1),(2) 両方の問題に使えるのだが，考えがここに及びましたか？

最初の 2 つはレベル３，$\boxed{\text{キク}}$ はレベル２，$\boxed{\text{ケコサシ}}$ は レベル 1.5 だね。$\boxed{\text{スセソ}}$ と $\boxed{\text{タチ}}$ はレベル３，$\boxed{\text{ツテトナ}}$ はレベル２ですね。最後の問は，たぶんほとんどの学生が解けなかったよね。レベル１です。しかし，直感的なあてずっぽうで答えに行き着くことがあるかもね。そんな人はきっと運がいいね。全体的には，まとまりのあるけっこういい問題でした。

第５問. (1) 円 O に対して，次の手順１で作図を行う。

ーーーー＜手順１＞ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

(Step1) 円 O と異なる 2 点で交わり，中心 O を通らない直線 ℓ を引く。円 O と直線 ℓ との交点を A, B とし，線分 AB の中点 C をとる。

(Step2) 円 O の周上に，点 D を $\angle$COD が鈍角となるようにとる。直線 CD を引き，円 O との交点で D とは異なる点を E とする。

(Step3) 点 D を通り直線 OC に垂直な直線を引き，直線 OC との交点を F とし，円 O との交点で D とは異なる点を G とする。

(Step4) 点 G における円 O の接線を引き，直線 ℓ との交点を H とする。

ーーー

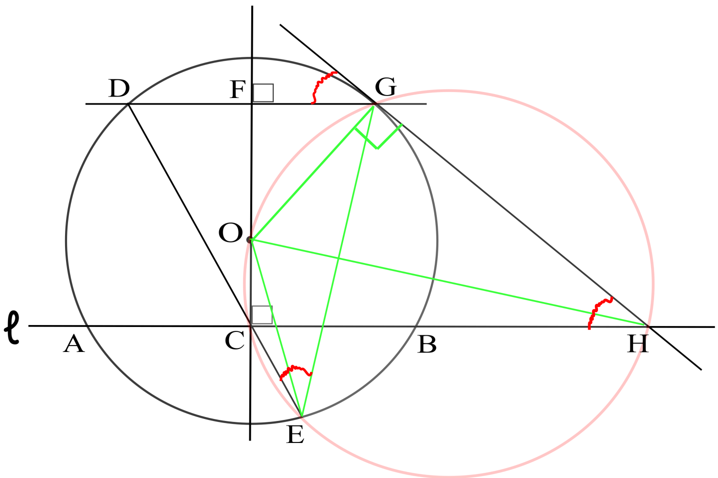


図5-1

（上図を参考にすること。ただし，カラーの直線や曲線は著者が書き入れたものである）

このとき，直線 ℓ と点 D の位置によらず，直線 EH は円 O の接線である。このことは，次の構想に基づいて，後のように説明できる。

解答）

－－－－＜構想＞－－－

直線 EH が円 O の接線であることを証明するためには，$\angle\mathrm{OEH}=90^\circ$ であることを示せばよい。

－－

手順１の (Step1) と (Step4) により，４点 C, G, H, O は同一円周上にあることがわかる。よって，$\angle$CHG= $\angle$FOG である。一方，点 E は円 O の周上にあることから，$\angle$FOG= $\angle$DEG がわかる。よって，$\angle$CHG= $\angle$DEG であるので，４点 C, G, H, E は同一円周上にある。この円が点 O を通ることにより，$\angle\mathrm{OEH}=90^\circ$ を示すことができる。

(2) 円 O に対して，(1) の手順１とは直線 ℓ の引き方を変え，次の手順２で作図を行う。

－－－－＜手順２＞－－－

(Step1) 円 O と共有点をもたない直線 ℓ を引く。中心 O から直線 ℓ に垂直な直線を引き，直線 ℓ との交点を P とする。

(Step2) 円 O の周上に，点 Q を $\angle$POQ が鈍角となるようにとる。直線 PQ を引き，円 O との交点で Q とは異なる点を R とする。

(Step3) 点 Q を通り直線 OP に垂直な直線を引き，円 O との交点で Q とは異なる点を S とする。

(Step4) 点 S における円 O の接線を引き。直線 ℓ との交点を T とする。（下の図 5-2 を参照せよ）

－－

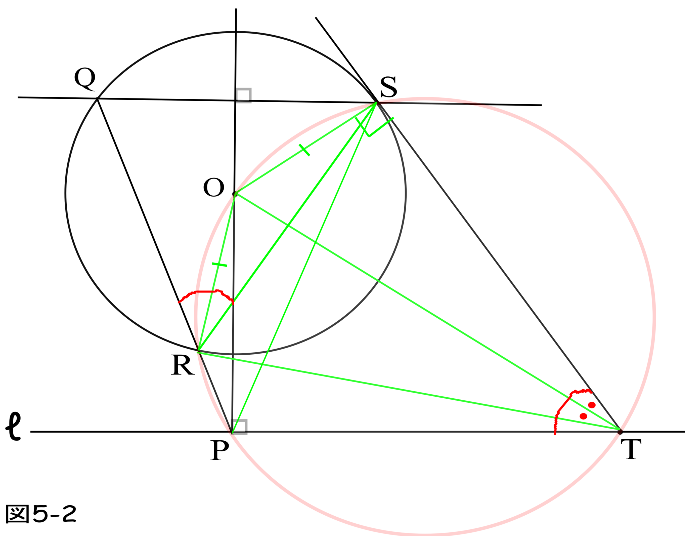


図5-2

解答）このとき，

$$\angle\mathrm{PTS}=\angle\mathrm{QRS}\quad\cdots\ ①$$

である。（①は前問と同様に解答できる。また①から，４点 S, R, P, T は同一円周上にあることがわかる。さらに，４点 O, P, T, S も同一円周上にあるので，５点 O, R, P, T, S は同一円周上にある。すなわち，直線 TR は円 O の接線である。これらのことから，下の②がわかる。）

円 O の半径が $\sqrt{5}$ で，OT= $3\sqrt{6}$ であったとすると，３点 O, P, R を通る円の半径は

$$\frac{3\sqrt{6}}{2}\quad\cdots\ ②$$

であり，△ORT が直角三角形であることから，$x=$RT とおくと，

$(\sqrt{5})^2+x^2=(3\sqrt{6})^2$ より $x^2=49,\quad \therefore\ x=7.$ となるので， RT= 7 である。

受験者（or この論説の読者）の皆様は，設問①から設問②の間にけっこうな飛躍があるのに気が付きましたかね？ 「5 点 O, R, P, T, S は同一円周上にある」ということがわからないと，ほんとうは答えられないんだけれど，②の答はできた人が多かったでしょうね。

解説）手順 1 で示された図形はけっこう複雑なものですね。注意深く観察しないと解決の糸口がつかめないかもしれませんね。 $\boxed{\text{アイ}}$ はレベル 3， $\boxed{\text{ウ}}$ から $\boxed{\text{カ}}$ はレベル 1.5 ですね。(2) は (1) とちょっと違うのですが，結論が同じなのは面白いですね。難易度はやや難しいと言う感じでレベル 2 ですね。けっこういい問題でしたが，文系志望の受験生にとっては難しいかったかもね。

【総評】出題者は,「考えさせて，思考をすばやくまとめて結論を出させる，というようなおもしろい問題」を目指して問題作成をしていることと思います。このような目的は，問題にきちんとしたストーリー性が見られるようになってきたので，ある程度達成されていると思います。しかし，問題文と説明がやたらに長くなる傾向があるので，解答するための時間が長くならないように注意してほしいですね。

「数学 I, 数学 A」という範囲の試験は，おそらく理系以外の学部に進みたいという学生が多く受験していることと思います。このことを考えると，今回の試験もけっこう難しいものでしたね。「数学 II, 数学 B」にくらべると出題範囲は狭いのですが，その分問題の深さが深くなっていく傾向も見えます（例えば，第 4 問の (2)）。私が指摘したレベル 1 の問題は無くてもいいですね。60 分という試験時間を考えると，2 割がた問を減らしてもいいと思います。

私は,「数学 II, 数学 B」と「数学 I, 数学 A」を両方とも解いている訳ですが，今年は「数学 I, 数学 A」の方が難しかったですね。「数学 I, 数学 A」は範囲が狭いので，問の内容が数学的に深くなる傾向があるのです。去年と今年の問題を解いて見た限り，これらは文系の学生向けの試験とは言い難いですね。理系の学生向けの問題のように感じましたね。

問題の難易度にレベルを付けてきたので，これらの得点を表にして見ました。

表 1． 難易度別の配点

レベル	第 1 問 式の計算，三角比 円と三角形　I	第 2 問 ヒストグラム, 散布図 2 次関数　I	第 3 問 場合の数 A	第 4 問 整数の性質 不定方程式　A	第 5 問 平面図形 円と多角形　A
4〜3.5	3		3		
3	13	18	6	9	2
2.5	9	6	3		
2				5	8
1.5	2	3	5	3	10
1	3	3	3	3	
合計	30	30	20	20	20

今年の問題は，優・良・可で評価すると，優でしょうね。選択問題は，第 3 問がやや易しかったようですが，バランスがとれていたと思います。第 3 問と第 4 問を選択した場合と，第 3 問と第 5 問を選択した場合の，得点の合計は，難易度のレベルで考えると次のようになります。

	＜第３問，第４問を選択＞	＜第３問，第５問を選択＞
レベル３までできると	52 点	45 点
レベル 2.5　〃	70 点	62 点
レベル２　〃	75 点	71 点
レベル 1.5　〃	88 点	91 点

（第３問と第４問）を選択した学生の方が点を取りやすかったかも知れませんが，大差はないですね。

平均点は 55.65 だったので，平均点程度の得点をとった学生は，レベル３まではほとんど正解し，レベル 2.5 以上の問題は数個くらいできたという感じですね。私の希望は，レベル 2.5 の問題までは確実に正解して欲しいということですね。レベル 2.5 までの問題ならば，教科書を完全にマスターしていれば正解できると思っているからです。

いつも言っていることですが，数学の勉強は塾や予備校に行かなくても，一人で勉強できますよ。第一は，教科書を完全に理解することです。読んでみてわからない所は，自分で調べたり友人に聞いたりしてわかるようにすることです。教科書の例題や証明は，一度理解した後で何も見ないでもう一度自分でやってみてください。できなければ，できるまで挑戦して下さい。教科書の問も全部自分で解いて見て下さい（解答や関連事項などは自分専用のノートに全部書くこと）。わからないものは，わかるまでやりましょう。他人や先生に質問することも勧めます。聞くことは恥ずかしいことではありませんよ。こんな調子で教科書の内容を全て理解してください。

教科書が全部わかれば，私の指摘したレベル２までの問題は全て解けると思いますよ。さらに上を目指したい方は問題集を一冊（教科書レベルよりやや難しいもの）買って，全部自分で解いて見ることです。解答の過程は全てノートにきちんとかいて下さい。ノートが正解で埋まるまで繰り返して下さい。こんな勉強を続けていれば，共通テストは８割以上できると思います。私の言うことを信じてトライして見て下さい。頑張れ，若人よ !!

（3 月 12 日（日）’23 完，おとといのジョー）